BERTRAND

RAPPORT SUR LES PROGRÈS

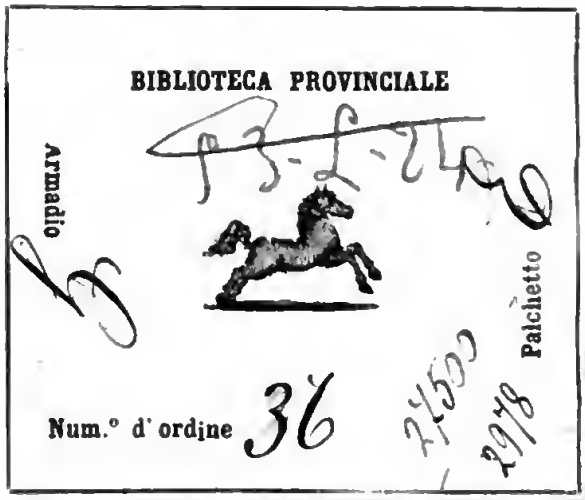
LES PLUS RECENTS

DE L'ANALYSE MATHÉMATIQUE

VITTORIO EM

NAZIONALE
B. Prov.
COLL.
14
BIBLIOTECA
VITT. EM. III
NAPOLI

14



B. Prov.
Coll. 14(24)

Digitized by Google

Digitized by Google

RECUEIL DE RAPPORTS

SUR

LES PROGRÈS DES LETTRES ET DES SCIENCES

EN FRANCE.

BIBLIOTECA PROVINCIALE
NAPOLI

Digitized by Google

PARIS,

LIBRAIRIE DE L. HACHETTE ET Cie,

BOULEVARD SAINT-GERMAIN, N° 77.

Digitized by Google

BIBLIOTECA PROVINCIALE
DI
NAPOLI

RECUEIL DE RAPPORTS

SUR

LES PROGRÈS DES LETTRES ET DES SCIENCES EN FRANCE.

RAPPORT SUR LES PROGRÈS

LES PLUS RÉCENTS

DE L'ANALYSE MATHÉMATIQUE,

PAR J. BERTRAND,

MEMBRE DE L'INSTITUT.

PUBLICATION FAITE SOUS LES AUSPICES

DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

PARIS,

IMPRIMÉ PAR AUTORISATION DE SON EXC. LE GARDE DES SCEAUX

A L'IMPRIMERIE IMPÉRIALE.

M DCCC LXVII.

Digitized by Google

VA 1
1527988

Digitized by Google

BIBLIOTECA NAZIONALE DI NAPOLI

RAPPORT SUR LES PROGRÈS

LES PLUS RÉCENTS

DE L'ANALYSE MATHÉMATIQUE

EN FRANCE.

Lagrange et Laplace, dont, au commencement de ce siècle, l'influence sur les sciences mathématiques régnait sans partage, plaçaient par leur présence l'Académie des sciences de Paris hors de pair, et auraient suffi seuls pour assurer à la France une supériorité incontestée. Ils étaient dignement entourés : Monge, Legendre, Ampère, Poinsot, Poisson, Fourier, Cauchy et Fresnel, les uns, depuis longtemps leurs confrères, les autres, bien dignes déjà de le devenir, avaient atteint, dès les vingt premières années de ce siècle, la plénitude de leur génie et mérité la gloire solide que le temps devait accroître encore. D'autres géomètres, jeunes alors, mais déjà pleins d'ardeur et de talent, leur promettaient de dignes successeurs. MM. Dupin et Poncelet, par des ouvrages restés classiques et admirés aujourd'hui comme au premier jour, se plaçaient, dès leurs débuts, au nombre des inventeurs dont le nom ne saurait périr. MM. Duhamel et Lamé ne tardaient pas à montrer tout ce que la physique mathématique devait attendre de leurs esprits si profonds et si dissemblables. L'un, disciple immédiat de Fourier et animé de son esprit, modèle comme lui de netteté et d'élégance, semble ne vouloir toucher à une question que pour en dire le der-

Digitized by Google

nier mot, en donnant aux physiciens, pour conclusions de chacun de ses mémoires, un résultat positif et palpable pour ainsi dire. L'autre, plein de foi dans les forces de l'esprit humain, n'assignant aucune limite à l'ambition de ses recherches, devait tenter, avec autant de patience que de savoir et de vigueur d'esprit, la réduction à une loi unique de toutes les forces de la nature. De beaux problèmes ingénieusement résolus, des méthodes fécondes bien vite devenues classiques, des calculs admirés par les plus grands maîtres, ne sont à ses yeux que des épisodes insignifiants de son œuvre; les yeux toujours fixés sur un but plus élevé, il n'a jamais désespéré de l'atteindre; et si les bonnes fortunes analytiques qui le placent au premier rang des géomètres ne le laissent pas indifférent, c'est qu'il estime qu'elles ne sont possibles que sur la route de la vérité.

MM. Sturm, Liouville et Chasles enfin, qui devaient exercer une si grande influence sur les études mathématiques, et dont les géomètres de la génération qui les suit sont sans exception les disciples, commençaient, avant 1830, la belle série de travaux que la mort seule a interrompue pour l'un d'eux, et qui, d'un bout à l'autre de l'Europe, placent aujourd'hui le nom des deux autres dans la bouche de quiconque veut citer parmi nous les représentants les plus actifs et les plus illustres de l'analyse pure et de la géométrie. Les noms que je viens de citer, Monsieur le Ministre, sont ceux de nos maîtres; tous ceux qui aspirent au titre de géomètre ont lu et médité leurs œuvres, qui ne sont plus à juger. Le rapport que vous m'avez fait l'honneur de me demander les laissera donc de côté, et je me bornerai, comme vous l'avez désiré, à vous signaler les progrès plus récents, et actuels en quelque sorte, de l'analyse mathématique en France, sans rien préjuger, bien entendu, sur la place souvent imprévue que l'avenir peut réserver aux œuvres dont la portée immédiate reste parfois inaperçue.

Le résumé même rapide de tous les travaux publiés depuis vingt ans dépasserait de beaucoup l'étendue d'un simple rapport, et je me bornerai à signaler les plus grands progrès accomplis, en

indiquant sommairement seulement les recherches qui, sans se rattacher à un ensemble bien défini, peuvent, en prouvant le savoir et l'habileté de leurs auteurs, servir d'utiles exercices et d'étude intéressante aux amis de la géométrie.

La théorie des fonctions imaginaires, entièrement renouvelée par les travaux de Cauchy, a été l'occasion des plus grands progrès que l'analyse ait accomplis dans ce siècle. Les premiers travaux sur lesquels elle s'appuie remontent à ses *Exercices de mathématiques*, et la théorie des résidus peut en être considérée comme le point de départ. La démonstration du théorème de Taylor, dans laquelle il prouve la possibilité de développer toute fonction continue et bien définie, lorsque le module de la variable est moindre que celui des valeurs qui la rendent infinie ou discontinue, appartient aussi à la même théorie, qui cependant ne se dégage bien nettement que dans les mémoires présentés en 1846 à l'Académie des sciences de Paris. Cauchy, habitué, bien malheureusement pour sa gloire, à livrer ses idées au public au moment même où elles prenaient naissance, avait laissé bien des points dans le vague et d'importantes conséquences absolument inaperçues. La route était nettement frayée, mais une région aussi nouvelle et aussi vaste pouvait récompenser les efforts de plus d'un travailleur. MM. Liouville, Hermite, Puiseux, Briot et Bouquet n'ont pas tardé à inscrire glorieusement leurs noms dans l'histoire de cette grande théorie. Les deux premiers, malheureusement, n'ont pas encore publié leurs beaux travaux, bien connus et appréciés pourtant dans leurs résultats essentiels. Ceux de M. Liouville, professés au Collége de France devant un auditoire d'élite, ont eu particulièrement une grande influence sur les recherches ultérieures de plusieurs de ses auditeurs, qui se sont plu à le reconnaître loyalement. Quant aux recherches de M. Hermite, elles ont été signalées au public dans un rapport très-net de Cauchy, qui, non content d'en proclamer l'élégance et la haute portée, les analyse avec assez de détail pour les faire apprécier du lecteur.

M. Puiseux, dans un premier mémoire, a étudié avec beaucoup de bonheur et de talent une fonction d'une variable λ, définie par une équation rationnelle de la forme $\varphi(z, \lambda) = 0$. Une telle fonction présente, pour chaque valeur réelle ou imaginaire de la variable, un nombre de valeurs distinctes égal au degré de la fonction. Chacune d'elles, pour une valeur isolée de λ, peut être arbitrairement choisie; mais le choix une fois fait, si l'on suppose que λ varie d'une manière continue, les variations successives de z seront déterminées et telles, qu'en faisant reprendre à λ sa valeur primitive, il faudra quelquefois en adopter une nouvelle pour z.

Cette étude, fort intéressante en elle-même, est liée intimement à celle de l'intégrale définie $\int z\,d\lambda$, dans laquelle la série des valeurs imaginaires de z est représentée suivant la convention bien connue de Gauss, par les points d'une courbe donnée, le long de laquelle, suivant l'expression adoptée par Cauchy, on convient de faire l'intégration. Une intégrale ainsi définie dépend des deux extrémités de la courbe qui dirige l'intégration, et reste invariable lorsque celle-ci se déforme sans franchir certains points que M. Puiseux nomme les points critiques. La rencontre de l'un d'eux produit dans la valeur de l'intégrale un changement brusque, dont l'étude approfondie est l'un des buts principaux du beau mémoire de M. Puiseux.

L'application aux fonctions elliptiques se présente tout naturellement, et l'on retrouve, comme l'avait déjà signalé Cauchy, les théorèmes relatifs à la double périodicité dont la découverte avait, un quart de siècle plus tôt, commencé la réputation d'Abel et de Jacobi. M. Puiseux ne se borna pas à ces résultats connus d'avance, et sa méthode entièrement générale lui permit d'aborder des questions encore intactes, et de retrouver, dans certains cas étendus, des théorèmes déjà énoncés par M. Hermite, et déduits par lui de considérations toutes différentes.

Le mémoire de M. Puiseux, en fixant bien nettement le sens et la portée de plusieurs résultats rapidement indiqués par Cauchy,

Digitized by Google

devait fournir une base solide aux études ultérieures, sur lesquelles il a exercé la plus heureuse influence. Cauchy lui-même, loin de trouver mauvais qu'on le suivît et le devançât parfois sur le terrain qu'il avait abordé le premier, s'empressa d'approuver de toutes ses forces le travail de son éminent disciple et d'en recommander hautement l'étude. « M. Puiseux, dit-il, en terminant son rapport, a non-seulement ajouté de nouveaux développements et des perfectionnements nouveaux à la théorie des intégrales curvilignes des fonctions algébriques, mais, de plus, il a mis en évidence avec beaucoup de sagacité les lois suivant lesquelles les diverses valeurs d'une fonction algébrique se trouvent échangées entre elles quand la courbe qui dirige l'intégration tourne autour de l'un des points qu'il nomme points principaux; enfin il est parvenu à déterminer généralement le nombre des valeurs distinctes et le nombre des périodes de certaines intégrales curvilignes qui sont relatives à une classe très-étendue de fonctions algébriques, et qui comprennent comme cas particuliers les intégrales elliptiques et abeliennes. »

Les travaux de MM. Briot et Bouquet sur les intégrales algébriques ont fait faire à la question un pas nouveau et important. Après avoir, dans trois beaux mémoires insérés au Journal de l'École polytechnique, obtenu sur les intégrales exprimables sous forme finie, à l'aide de fonctions algébriques, logarithmiques ou elliptiques, quelques-uns des plus beaux théorèmes et des plus généraux dont se soit depuis longtemps enrichi le calcul intégral, MM. Briot et Bouquet ont voulu exposer dans un ouvrage didactique l'état actuel de cette belle et nouvelle théorie, en mêlant à leurs propres idées, sans autre préoccupation que celle d'être utiles, les découvertes et les travaux de tous leurs prédécesseurs. L'excellent cours de M. Liouville, au Collége de France, et le mémoire inédit dans lequel M. Hermite avait traité les mêmes questions ont été non-seulement leur aide, mais la base solide de leur édifice. Leur ouvrage, devenu classique parmi les géomètres, a été lu et cité avec honneur partout où se cultive la haute géométrie; et quoiqu'un

mode nouveau d'exposition, proposé par un géomètre allemand du plus rare mérite, M. Riemann, soit aujourd'hui préféré par les savants allemands, qui peut-être seront imités ailleurs, l'ouvrage de MM. Briot et Bouquet renferme de trop excellents principes, exposés avec trop de clarté, pour que ceux qui voudront s'instruire de ces théories difficiles ne trouvent pas longtemps encore plaisir et profit à le consulter.

Ne quittons pas la théorie des fonctions imaginaires sans rappeler le souvenir du commandant du génie Pierre-Alphonse Laurent, que la science a perdu il y a dix ans à peine, et dont les travaux, accomplis au milieu des devoirs d'un service des plus pénibles, promettaient un géomètre éminent. Laurent, sorti de l'École polytechnique en 1832, avait été dirigé presque immédiatement vers l'Afrique, où il prit part aux expéditions de Tlemcen et de Taffna. Chargé à son retour de travaux importants destinés à l'agrandissement du Havre, c'est au milieu de ces travaux techniques et des préoccupations qu'ils entraînent que Laurent composa ses premiers mémoires. Bien souvent ses amis, après l'avoir vu tout le jour sur les chantiers, apprenaient avec inquiétude qu'il avait passé la nuit à poursuivre des recherches mathématiques. Son premier envoi à l'Académie des sciences date de 1843. Laurent donnait une théorie complète de la variation des intégrales multiples : c'était la question proposée pour le grand prix de mathématiques, mais le mémoire de Laurent n'arriva pas en temps utile. Cauchy l'examina pourtant et le déclara digne d'être inséré dans le recueil des Savants étrangers. « Ce mémoire, ajoutait l'illustre rapporteur, ne le cède en rien pour la rigueur et pour l'élégance à l'excellente pièce de M. Sarrus, couronnée par l'Académie. » Une note sur le développement des fonctions, qui obtint peu de temps après un accueil aussi favorable, contient un théorème devenu classique, que MM. Briot et Bouquet ont inscrit dans leur bel ouvrage sous le nom de théorème de Laurent. Ces premiers travaux promettaient un géomètre éminent. En poursuivant la même voie, Laurent y aurait trouvé sans doute des succès plus brillants

encore et aussi incontestés; mais son esprit curieux et ardent se trouva bientôt à l'étroit dans le champ des mathématiques pures. Les fortes études dont ses premiers mémoires sont l'irrécusable témoignage ne furent à ses yeux qu'un instrument acquis pour traiter les questions les plus mystérieuses de la philosophie naturelle. Les problèmes les plus difficiles de la physique mathématique ont occupé les dernières années de sa vie. Nous n'avons pas à le suivre dans cette tentative hardie. Les questions sur lesquelles il a épuisé ses forces sont telles que leur solution définitive et incontestée aurait placé son nom parmi les plus illustres de notre époque. Il les a étudiées avec toutes les ressources dont dispose la science; l'avenir jugera les vues qu'il a émises et saura en tirer profit.

Quoique la théorie générale des fonctions imaginaires et des intégrales algébriques fasse le sujet principal des recherches dont nous venons d'esquisser l'histoire, l'attention des géomètres a été frappée surtout de leur application aux fonctions elliptiques et de la merveilleuse facilité avec laquelle elle fournit les résultats les plus cachés jusque-là de cette grande et difficile théorie. L'étude de ces fonctions, née des écrits d'Euler et de Lagrange, et créée pour ainsi dire par les persévérants efforts de Legendre, avait été depuis un quart de siècle réservée aux efforts des géomètres étrangers à la France. Les grands noms d'Abel et de Jacobi devaient et doivent encore figurer au premier rang dans leur histoire. Indépendamment du point de vue nouveau dont l'honneur appartient à Cauchy, nous devons signaler sur ce point de la science les belles recherches par lesquels M. Hermite a, depuis son entrée dans la carrière, mêlé avec tant de bonheur aux progrès de cette théorie généralisée ses travaux non moins profonds sur l'algèbre et sur la théorie des nombres.

Le premier écrit de M. Hermite sur ce grand et difficile sujet date de 1841. Simple élève de première année à l'École polytechnique, il ne craignit pas d'adresser directement à Jacobi une découverte que l'illustre géomètre jugea digne de figurer dans le

premier volume de ses œuvres complètes, en conservant la rédaction même du jeune écolier et la forme de sa lettre d'envoi :

« Je vous remercie bien sincèrement, lui avait-il répondu, de la belle et importante communication que vous venez de me faire touchant la division des fonctions abeliennes. Vous vous êtes ouvert par la découverte de cette division un vaste champ de recherches et de découvertes nouvelles qui donnent un grand essor à l'art analytique. »

Le mémoire de M. Hermite, présenté en même temps à l'Académie des sciences de Paris, ne pouvait manquer d'être approuvé et dignement loué par elle. « Ce que l'on savait faire, dit M. Liouville, en en rendant compte, pour les équations à une seule inconnue de la théorie des fonctions elliptiques, M. Hermite est parvenu à l'effectuer pour les équations à plusieurs inconnues, à l'aide desquelles on divise les fonctions abeliennes produites par l'intégration des radicaux carrés quelconques. C'est ainsi, on nous pardonnera ce rapprochement entre l'ancienne et la nouvelle École polytechnique, c'est ainsi qu'à son début Poisson étendit à la détermination du degré de l'équation finale, résultant de l'élimination des inconnues entre un nombre quelconque d'équations, la méthode des fonctions symétriques, dont on n'avait d'abord su faire usage que pour deux équations à deux inconnues. »

D'autres lettres, adressées à Jacobi par M. Hermite et insérées comme la première dans les œuvres de l'illustre inventeur, achevèrent bientôt de placer leur auteur, bien jeune encore, au premier rang des géomètres français.

M. Hermite semble dans ses lettres abandonner pour un temps l'étude du calcul intégral pour s'appliquer à l'algèbre et à la théorie des nombres; il reste, au fond, cependant sur le même terrain. Ces trois branches de la science mathématique, si distinctes pourtant à leur origine, sont devenues assez vastes pour se rejoindre et se confondre sur bien des points qui, pour chacune d'elles, ne sont accessibles qu'aux plus habiles et après de longues et patientes études.

Les travaux de Gauss, de Jacobi et de Dirichlet ont préparé et assuré la voie. C'est de ces grands maîtres surtout que M. Hermite s'est inspiré, et ses recherches, sur bien des points, continuent et accroissent les leurs, sans que les juges les plus sévères puissent apercevoir dans la partie nouvelle une main moins habile ou moins exercée.

M. Hermite a pris pour point de départ de ses travaux sur la théorie des nombres cette partie difficile des *Disquisitiones arithmeticæ* consacrée par son illustre auteur à la théorie des formes quadratiques binaires. On sait que les découvertes de Gauss, le fondateur de l'arithmétique moderne, sont aussi belles que ses méthodes offrent de difficulté pour la plupart de ceux qui en ont essayé l'étude. Il semble parfois que Gauss ait à son service une algèbre plus avancée que celle de Lagrange, et que des principes nouveaux lui servent de guide secret dans ses transformations analytiques, dont le jeu reste un mystère pour le lecteur, conduit au résultat pour ainsi dire à son insu. Ce sont ces principes que M. Hermite s'est appliqué à dégager avec netteté, de manière à s'en faire un instrument pour pénétrer plus avant dans le champ indéfini que Gauss a ouvert.

Citons comme exemple le théorème sur le déterminant de la forme adjointe *des formes quadratiques à un nombre quelconque d'indéterminées*. M. Hermite a mis surtout en évidence toute la fécondité de ce théorème dans les recherches sur le nombre des racines réelles ou imaginaires d'une équation comprise entre des limites données; il en a déduit aussi un beau théorème de théorie des nombres. La totalité des formes *quadratiques d'un nombre donné de variables et qui ont le même invariant ne contient qu'un nombre fini de classes distinctes*. En continuant l'étude de ces théories si difficiles, M. Hermite a su, par des principes qui lui sont propres, aborder un ordre tout nouveau de questions en obtenant des résultats aussi neufs que la méthode qui y conduit. En remarquant que la réduction des formes quadratiques à deux indéterminées se rat-

Digitized by Google

tache au fond à la théorie des fractions continues, M. Hermite a été conduit à tirer de la réduction arithmétique des formes ternaires une série indéfinie de nouveaux modes d'approximation des quantités incommensurables s'appliquant aux équations du troisième degré ou de degré supérieur. Dans ce système d'approximation, on est toujours conduit à exécuter un système d'opérations périodiques, en sorte que les diverses irrationnelles que l'on considère sont caractérisées, chacune dans son genre, comme le sont les racines carrées par les fractions continues, et il conclut enfin ce beau théorème : *les équations en nombre infini dont les coefficients sont entiers et ont même* déterminant, *ne présentent dans leurs racines qu'un nombre limité d'irrationalités distinctes, et l'on peut réduire toutes les équations du genre considéré à un nombre limité d'entre elles par la substitution du tchirnaus.*

De telles recherches, on le comprend, ne sont pas susceptibles d'analyse, et de longues explications seraient nécessaires pour faire comprendre seulement l'énoncé des résultats. Il est impossible cependant de ne pas citer, avant de quitter les travaux de M. Hermite, son beau mémoire sur l'équation du cinquième degré. Abel, en prouvant l'impossibité de la résoudre, semblait avoir mis fin aux recherches sur cette question si longtemps et si inutilement abordée. Il n'en a rien été pourtant, et les ressources de l'analyse mathématique, reconnues insuffisantes sous la forme adoptée jusque là, devaient seulement être essayées dans une autre voie.

C'est ce qu'a fait M. Hermite, dans un mémoire publié en 1859, et suivi bientôt de travaux analogues, dans lesquels d'illustres géomètres étrangers, M. Kronecker surtout, atteignaient le même but par des voies différentes.

Un géomètre anglais, M. Jerrard, avait ramené toute équation du cinquième degré à une équation à trois termes dont un seul coefficient reste indéterminé. C'était un grand pas dans la théorie, puisque toute équation pouvait dès lors être résolue à l'aide d'une

table à simple entrée. M. Hermite s'est appliqué à résoudre l'équation réduite de M. Jerrard, en introduisant comme auxiliaire la fonction qui exprime les relations entre le module d'une fonction elliptique et le rapport des deux périodes. Au lieu de chercher à représenter par une formule radicale à détermination multiple le système des racines si étroitement liées entre elles, quand on les considère comme fonctions des coefficients, on peut, ainsi que l'exemple en a été donné pour le troisième degré, chercher, en introduisant des variables auxiliaires, à obtenir les racines séparément exprimées par autant de fonctions distinctes et uniformes relatives à ces nouvelles variables. C'est ainsi que dans le cas de l'équation

$$x^5 - 3x + 2a = 0$$

il suffit de représenter a par le sinus d'un angle α, pour que les racines se séparent en trois fonctions bien déterminées, $2 \sin \frac{\alpha}{3}$, $2 \sin \frac{\alpha + 2\pi}{3}$, $2 \sin \frac{\alpha + 4\pi}{3}$.

D'autres géomètres français ont également apporté une contribution importante à la théorie des fonctions elliptiques.

M. J.-A. Serret, presqu'à son début dans la science, a vivement excité l'intérêt des géomètres par la découverte élégante et inattendue d'une représentation géométrique de ces fonctions pour un nombre infini de modules. Laissons parler M. Liouville, rapporteur de son mémoire devant l'Académie des sciences.

« Le mémoire de M. Serret, dit l'illustre rapporteur, a pour objet les représentations des intégrales elliptiques et ultra-elliptiques de Legendre, c'est à dire des intégrales dont l'élément est la racine carrée d'une fonction rationnelle. L'auteur se propose de représenter, du moins quand cela est possible, leur valeur indéfinie par un arc de courbe algébrique, en se bornant toutefois au cas où les deux coordonnées rectangulaires d'un point de la courbe sont exprimables rationnellement en fonctions de la variable à laquelle se

rapporte l'intégration; en d'autres termes, il cherche les solutions réelles et rationnelles que peut avoir l'équation

$$dx^2 + dy^2 = Z\,dz^2,$$

où x, y et z désignent des fonctions de z.

« Ce problème d'analyse indéterminée, très-intéressant en lui-même, indépendamment de ses applications, est résolu d'une manière simple dans le mémoire de M. Serret. On arrive à une formule générale; mais les calculs auxquels il faut ensuite se livrer quand on veut compléter la solution pour une intégrale de forme donnée étaient longs et compliqués. M. Serret ne s'est occupé avec détail que des fonctions elliptiques de première espèce.....

« Le mémoire de M. Serret, ajoute en terminant M. Liouville, renferme comme on voit des résultats utiles, remarquables. On savait depuis longtemps qu'il existe une courbe du sixième degré dont les arcs représentent, à une quantité algébrique près, les fonctions elliptiques de première espèce. On peut même, dans chaque cas, faire disparaître la quantité complémentaire, en prenant convenablement les extrémités de l'arc. Mais à cause des deux extrémités variables, il y a en quelque sorte deux arcs employés, et ce n'est pas par un élément $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, mais par la somme de deux éléments, que la différentielle de la fonction elle-même se trouve exprimée. Sous un certain point de vue, une telle représentation doit être regardée comme imparfaite. Nous avons, au contraire, un mode parfait de représentation dans la lemniscate, aussi les géomètres ont-ils étudié cette courbe avec beaucoup de soin. Or M. Serret nous fait connaître une infinité de courbes algébriques dont les arcs jouissent aussi de la propriété d'avoir une différentielle identiquement égale à celle d'une fonction elliptique de première espèce; de là un nouveau champ ouvert aux spéculations géométriques. La réduction des quadratures aux rectifications considérée en général, et la résolution des équations indéterminées dont elle dépend appartiennent

d'ailleurs à une branche étendue et difficile de l'analyse, que l'on a jusqu'ici à peine effleurée. Le succès que M. Serret vient d'obtenir dans cette matière délicate donnera lieu sans doute à de nouvelles tentatives dont la science profitera. »

M. Serret s'est chargé lui même de justifier la prédiction de M. Liouville. Son mémoire sur la représentation des intégrales par les arcs de cercle contient d'excellentes recherches et d'élégants résultats sur une question longtemps étudiée par l'illustre Euler, qui n'avait obtenu qu'une petite partie des solutions que M. Serret fait connaître en totalité. Citons encore, parmi les travaux importants des géomètres français sur les questions qui se rattachent à la théorie des fonctions elliptiques, le très-savant et très-profond mémoire du père Joubert, sur la théorie des fonctions elliptiques et son application à la théorie des nombres. Le père Joubert, que notre École normale peut revendiquer comme l'un de ses plus brillants élèves, est devenu surtout, comme géomètre, le disciple de M. Hermite, comme M. Hermite lui-même l'est de Gauss et de Jacobi, et son esprit vigoureux et capable d'invention reproduit les qualités du maître sans rien perdre de son originalité.

M. Moutard, comme le père Joubert, a su dans un petit nombre de pages mériter toute l'estime des géomètres, et faire regretter qu'un esprit aussi sagace et un talent aussi ferme se montre si sobre de productions.

C'est dans une note ajoutée à l'ouvrage de M. Poncelet, intitulé *Application d'analyse et de géométrie*, que s'est révélé pour la première fois le talent réellement distingué et la science profonde de M. Moutard. A l'occasion d'un problème célèbre de géométrie et de l'un des plus beaux théorèmes de l'illustre auteur du livre, il donne, après Jacobi, des développements qui établissent un lien curieux entre la théorie des fonctions elliptiques et cette question tout élémentaire. Mais il s'élève plus haut encore, et se retrouvant sur le terrain où l'ont conduit de belles leçons de M. Liouville au Collége de France, il se montre capable d'y marcher seul, et par

quelques pages réellement excellentes, sait acquérir le droit d'être compté parmi les géomètres habiles de notre époque.

M. Mathet, professeur au lycée de Nîmes, a, dans une thèse fort remarquée, traité des questions analogues, et montré également beaucoup de pénétration et de savoir.

M. Émile Mathieu a présenté également à l'Académie des sciences un savant mémoire encore inédit sur la transformation des fonctions elliptiques et les équations qui lient les modules de deux fonctions transformables l'une dans l'autre par une substitution rationnelle.

M. Despeyrous a publié dans le Recueil des mémoires de l'Académie de Dijon un travail intéressant sur les fonctions elliptiques. Une démonstration élégante qui s'y trouve avait assez attiré l'attention de M. Sturm pour qu'il la copiât de sa main. M. Liouville la retrouvant dans ses papiers, la jugea digne de lui, et la présenta à l'Académie des sciences comme une œuvre posthume de son ami. La réclamation très-fondée de M. Despeyrous a signalé aux géomètres un recueil qu'ils consultent rarement, et beaucoup d'entre eux auraient, sans cet incident, ignoré l'excellent mémoire auquel il a donné sans aucun doute de plus nombreux lecteurs.

Les théories d'algèbre supérieure, qui jouent un si grand rôle dans les recherches dont nous avons parlé jusqu'ici, ont été l'objet de travaux importants et variés. M. J.-A. Serret a exposé les plus importants dans un élégant et remarquable ouvrage qui, sur bien des points, est lui-même une œuvre originale.

L'ouvrage de M. Serret n'est pas un traité d'algèbre; le lecteur qui l'aborde doit être depuis longtemps familiarisé avec l'emploi des méthodes générales et classiques. M. Serret le conduit alors par une route facile jusqu'aux résultats les plus élevés de l'une des branches de la science, en négligeant complétement d'autres théories, d'un intérêt fort grand aussi, mais qui n'entrent pas dans son cadre. M. Serret, en effet, n'aime pas à effleurer les questions; il expose sur celles qu'il aborde les travaux des plus illustres géomètres; il sait les éclaircir tout en les condensant et en pénétrer les

principes, sans permettre aux écrivains les plus profonds, qu'il suit sur leur terrain quel qu'il soit, de lui dérober un seul de leurs secrets.

Dans l'une des sections les plus importantes et les plus belles de son livre, M. Serret traite avec grand détail la théorie si difficile du nombre de valeurs dont une fonction est susceptible quand on y permute les lettres qu'elle renferme. Cette théorie, remaniée avec soin dans les éditions successives du traité d'algèbre supérieure, est exposée dans la dernière d'après les beaux et nombreux travaux de Cauchy. Sans s'effrayer des longueurs et des redites de quinze ou vingt mémoires où Cauchy déposait ses idées au jour le jour en quelque sorte, et sans aucun plan arrêté, ne craignant pas souvent de revenir sur ses pas en abandonnant, parfois sans le dire, la route inutilement suivie pendant un grand nombre de pages, M. Serret a tout étudié, tout résumé avec son talent habituel, et rendu avec autant de précision que de clarté, en en formant un tout homogène, les beaux travaux de Galois, de MM. Hermite, Kronecker et Betti.

Parmi les géomètres qui ont contribué aux progrès de cette grande et difficile théorie, il est juste de citer aussi M. Émile Mathieu et M. Camille Jordan, qui tous deux y ont consacré des thèses très-remarquables et louées sans restriction l'une et l'autre par la faculté des sciences de Paris.

M. Émile Mathieu a approfondi plus qu'on ne l'avait fait avant lui la notion des fonctions transitives introduites dans la science par Cauchy, et son mémoire, par l'intérêt des résultats qu'il contient, non moins que par la forme ingénieuse des démonstrations, mérite une mention toute spéciale.

D'autres mémoires de M. Mathieu, relatifs à la physique mathématique, montrent, comme ses travaux sur l'algèbre, autant de pénétration que de connaissance profonde de la science. Il vous en sera rendu compte dans un autre rapport dont l'auteur, je n'en doute pas, s'associera à moi de grand cœur pour signaler à toute votre

bienveillance un jeune homme réellement doué des qualités du géomètre, et qui jusqu'ici, malgré l'estime qu'il a su inspirer à tous, est resté en dehors de toutes les fonctions dont ses remarquables travaux sembleraient devoir lui rendre l'accès facile.

M. Camille Jordan, doué, comme M. Mathieu, d'un esprit géométrique profond et inventif, est de plus un ingénieur distingué, dont les études sérieuses ont porté sur les sciences les plus diverses. Les rares loisirs que lui laissent ses fonctions d'ingénieur ont produit plus d'une fois des travaux considérables que l'on serait tenté d'attribuer aux méditations d'un géomètre exclusivement occupé de ses études. Outre sa thèse relative aux substitutions, M. Jordan a composé, en effet, sur la théorie des corps flottants, un excellent mémoire récompensé par l'Académie des sciences, et deux études remarquables sur les polyèdres, dont la première sera insérée dans le recueil des Savants étrangers. « Le mémoire de M. Jordan, très-intéressant par ses résultats, disait le rapporteur de l'Académie, montre chez son auteur, en même temps qu'une grande perspicacité, une rare habileté dans l'emploi des considérations géométriques les plus délicates; et l'Académie ne saurait trop encourager l'auteur à persévérer dans cette voie, où il a su, dans une question fort élémentaire et placée en quelque sorte au seuil de la science, déployer un véritable talent de géomètre. » M. Jordan, tout en suivant le conseil qui lui était donné et montrant par un nouveau mémoire sur les polyèdres qu'il persiste dans la même voie, a présenté sur un sujet fort différent un mémoire encore inédit, qui, si les résultats annoncés sur un sujet aussi délicat ne donnent lieu à aucune objection, sera, sans contredit, son œuvre capitale.

Les travaux de Galois sur la théorie des équations résolubles par radicaux n'ont pas dit le dernier mot de la question; et M. Jordan, à qui ses travaux antérieurs donnent le droit d'être cru sur parole, annonce qu'il s'est avancé plus loin encore, en étendant à des équations de degrés quelconques les théories, déjà si difficiles, relatives à celles du degré premier. S'appuyant sur l'idée féconde

due à Galois, de considérer dans chaque équation ce qu'il nomme *le groupe propre* et qui fait connaître la loi des substitutions qui laissent invariables les fonctions des racines rationnellement exprimables par les coefficients, M. Jordan s'est proposé de chercher la nature des relations qui peuvent exister entre les diverses irrationnelles algébriques, et, entre autres résultats remarquables, il a trouvé le théorème suivant : *la relation algébrique la plus générale qui puisse exister entre les racines de deux équations irréductibles à coefficients rationnels, consiste dans l'égalité de deux fonctions rationnelles formées respectivement avec les racines de ces équations.*

Abordant ensuite un problème plus spécial, il cherche à déterminer les types d'équations résolubles par radicaux. Galois a découvert la propriété fondamentale de leur groupe, qui, pour les équations du degré premier, permet, comme le montre M. Serret dans son bel ouvrage, de résoudre simplement la question. L'extension aux équations de degrés quelconques présente au contraire de grandes difficultés que, dans son travail actuellement sous presse, M. Jordan croit avoir complétement surmontées; il prouve en effet :

1° Que la solution du problème pour une valeur quelconque n de degré se déduit des solutions du même problème pour les valeurs de degré qui sont, parmi les diviseurs de n, des puissances de nombres premiers;

2° Que la solution de ce problème pour un de ces diviseurs p^k se déduit à celle d'autres problèmes analogues relatifs à des équations de degré moindre que le proposé; on arrive par l'application répétée de la même méthode à des équations de degré assez peu élevé pour que la solution devienne intuitive.

La méthode de M. Jordan le conduit à affirmer, contrairement à l'assertion de Galois, qu'il existe en général pour chaque degré donné plusieurs types généraux d'équations résolubles par radicaux, et il croit même pouvoir donner *a priori* le nombre de ces types, qu'il distribue en genres et en classes.

M. Despeyrous a traité aussi les mêmes questions; un mémoire de lui, présenté à l'Académie des sciences, le montre capable de lutter avec les grandes difficultés qu'elles présentent. Il a même cru les avoir surmontées et l'a, il y a plusieurs années déjà, formellement annoncé au Comité des Sociétés savantes du ministère de l'instruction publique. Il n'a pas, jusqu'ici, donné sa théorie, mais personne encore ne l'a devancé, et si aucune difficulté ne subsiste, il aura l'honneur d'avoir résolu un problème rendu célèbre déjà par les efforts des plus illustres géomètres.

M. Maximilien Marie, répétiteur à l'École polytechnique, a consacré à la théorie des fonctions imaginaires un grand nombre de mémoires dirigés dans une voie qui lui est propre. Le but principal qu'il se proposait d'abord a été la représentation géométrique des solutions réelles et imaginaires d'une équation de deux variables. Dans le système adopté par Gauss et par Cauchy, et dont les géomètres ont déduit de si importantes conséquences, une expression imaginaire représente un point, et pour représenter les solutions d'une équation, il faudrait par conséquent imaginer deux surfaces, dont l'une a pour ordonnée la partie réelle, et l'autre le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans l'une des variables, pour le point dont la projection représente la valeur complète de l'autre. M. Marie procède tout autrement, il associe, pour les représenter par les points d'une courbe, les solutions dans lesquelles les coefficients de $\sqrt{-1}$ dans les deux variables ont un rapport donné d'avance, et chacune d'elles est représentée par un point dont les coordonnées réelles sont obtenues en remplaçant dans leur expression $\sqrt{-1}$ par $+1$. Ce mode de représentation, qui semble d'abord arbitraire, réunit plusieurs avantages, qui ont déterminé le choix de son auteur et lui ont permis d'en faire un usage utile. Nous ne pouvons mieux faire que de citer, pour le démontrer, le rapport présenté par Cauchy à l'Académie des sciences, sur l'un des mémoires de M. Marie. « Les courbes conjuguées de M. Marie, dit l'illustre rapporteur, jouissent de propriétés remarquables. Citons en quelques-unes :

« Chacune des courbes conjuguées est généralement tangente à la courbe réelle aux points où elle la rencontre, par suite la courbe réelle est une enveloppe des diverses conjuguées.

« Si l'une des conjuguées représente un anneau fermé, si d'ailleurs on nomme S l'aire comprise dans cet anneau et l'arc décrit sur le périmètre de cet anneau par un point qui se meut par un mouvement de rotation direct autour de l'aire S, le produit de cette aire par $\sqrt{-1}$ sera généralement la valeur de l'intégrale

$$\int_0^c y \, D_s x \, ds$$

c étant le périmètre entier de l'aire S, ou ce qu'on peut nommer la période imaginaire de l'intégrale

$$\int y \, D_s x \, ds$$

si l'on fait varier par degrés insensibles la forme d'un anneau fermé appartenant à une courbe conjuguée, en faisant varier l'inclinaison de l'axe des y, l'aire S compris dans cet anneau restera ordinairement invariable. Cette dernière proposition suppose toutefois que l'axe des y venant à changer de direction par degrés insensibles, la valeur de y tirée de l'équation (1) n'atteint pas une valeur pour laquelle la dérivée de $f(x, y)$ relative à y s'évanouisse avec $f(x, y)$. Dans la dernière partie de son mémoire, M. Marie considère non plus une fonction de y et de x, mais une fonction z de deux variables x et y déterminée par une *équation caractéristique* de la forme

$$f(x, y, z) = 0$$

A des valeurs réelles de x, y correspondent, en vertu de cette équation des valeurs de z réelles ou imaginaires, par conséquent de la forme

$$z = u$$

ou de la forme

$$z = v + w\sqrt{-1}$$

u, v, w, étant des fonctions réelles de x, y, z; cela posé, concevons que les variables x et y représentant deux coordonnées réelles, on construise : 1° la surface courbe dont l'ordonnée serait représentée par la fonction u; 2° la surface courbe dont l'ordonnée serait représentée par la somme $v+w$; ces deux surfaces sont celles que M. Marie nomme la surface réelle et la conjuguée de la surface réelle.

« Si avant de résoudre l'équation caractéristique on opère une transformation de coordonnées en assignant une direction nouvelle à l'axe de z, on substituera ainsi aux variables x, y, z, trois nouvelles variables x_1, y_1, z_1 qui offriront toutes trois, par des valeurs réelles de x et de y et pour une valeur imaginaire de z, des valeurs correspondantes imaginaires, dans lesquelles les rapports entre les coefficients de $\sqrt{-1}$ seront constants.....,
De cette observation, il résulte qu'à une même surface réelle correspondent en nombre infini des surfaces conjuguées, dont chacune a pour coordonnées variables les valeurs réelles de x, y, z, que l'on obtient en remplaçant $\sqrt{-1}$ par l'unité, dans les valeurs imaginaires de x, y, z, assujetties à la double condition de vérifier l'équation caractéristique et d'offrir pour coefficient de $\sqrt{-1}$, des quantités dont les rapports demeurent constants. Les surfaces conjuguées, définies comme on vient de le dire, jouissent de propriétés remarquables analogues à celles des courbes conjuguées. Ainsi en particulier, comme l'observe M. Marie, lorsqu'une surface conjuguée est fermée et limitée en tous sens, le volume V compris dans cette surface, et représenté par une intégrale double, reste généralement invariable, tandis que l'on fait varier par degrés insensibles ou entre des limites quelconques, ou du moins entre certaines limites, l'inclinaison de l'axe des z sur l'axe des x ou sur l'axe des y. D'ailleurs le produit $V\sqrt{-1}$ est ce qu'on peut nommer la période imaginaire d'une certaine intégrale double.

« En résumé, ajoute M. Cauchy, les commissaires jugent que le mémoire de M. Marie présente sur les périodes des intégrales sim-

ples ou doubles, des recherches intéressantes, qui ont conduit l'auteur à des résultats nouveaux, et qu'en conséquence ce mémoire mérite d'être approuvé par l'Académie. »

M. Lebesgue, ancien professeur à la faculté des sciences de Bordeaux, et très-versé, comme le prouvent un grand nombre de Mémoires, dans les diverses parties des mathématiques pures, s'est appliqué surtout avec une sorte de passion à l'étude de la théorie des nombres. Le grand ouvrage de Gauss, *Disquisitiones arithmeticæ*, si profond et si difficile pour les commençants, a été l'objet de ses méditations continuelles, et il en promet un commentaire, dont plusieurs beaux mémoires, qui en sont comme les spécimens, lui ont valu, depuis longtemps déjà, le titre dignement mérité de correspondant de l'Institut de France et la haute estime des géomètres de tous les pays.

La géométrie générale, considérée comme application de l'analyse infinitésimale doit occuper une grande place dans l'histoire de nos travaux mathématiques, et cette grande théorie dont Euler, Monge et Gauss ont posé les bases, a fait de nos jours de remarquables progrès, dont les géomètres français peuvent réclamer une large part.

L'un d'eux, M. O. Bonnet, qui depuis plus de vingt ans étudie avec autant de bonheur que de talent les questions relatives aux surfaces, y a consacré un grand nombre de mémoires. Citons d'abord, quoiqu'il ne soit pas le premier par la date, un beau mémoire *sur les surfaces dont les lignes de courbure sont planes ou sphériques*. Cette question difficile et pleine d'intérêt s'était tout naturellement présentée à l'esprit des géomètres qui, dans des cas particuliers, avaient obtenu déjà des résultats fort remarquables. Monge avait fait connaître dans son grand ouvrage les surfaces dont les lignes de courbure sont planes et situées dans des plans parallèles, et l'on connaissait, sur les surfaces à lignes de courbures circulaires, un très-beau théorème de M. Dupin, récemment démontré avec élégance par M. Mannheim, dont les recherches de géométrie pure occupe-

ront une place si distinguée dans un autre rapport. M. Bonnet rejette toutes les restrictions, et après avoir habilement mis le problème en équation, il parvient malgré leur complication à les intégrer, et à en déduire la détermination géométrique des surfaces cherchées.

Le mémoire de M. Bonnet devait, comme toute œuvre réellement importante, donner lieu à des recherches de même nature. M. J. A. Serret, dont l'esprit clair et ingénieux s'est appliqué successivement à toutes les parties de la science, a montré, dans un beau mémoire qui a suivi de près celui de M. Bonnet, que la question n'était pas épuisée. M. Joachimstahl, géomètre éminent de Berlin, n'a pas dédaigné de la reprendre après les deux savants français, et M. Picart enfin, professeur au lycée Charlemagne, a montré, dans une thèse excellente présentée à la faculté de Paris, qu'un esprit sagace et désireux de la simplicité peut perfectionner et élucider les travaux des maîtres les plus habiles; si cette théorie élégante doit, comme je n'en doute pas, devenir classique un jour, la thèse de M. Picart y aura, sans nul doute, beaucoup contribué.

Citons encore parmi les beaux travaux de M. Bonnet, un très-important mémoire sur la théorie des surfaces publié dans le journal de M. Liouville. M. Bonnet, dans ce mémoire, indique un système de variables qui permet de mettre sous forme extrêmement simple la plupart des formules relatives à la théorie des surfaces, et il les applique très-habilement aux questions résolues par Monge dans son analyse appliquée, et à d'autres plus difficiles. Les variables adoptées sont celles qui servent à fixer la position du plan tangent. Après avoir donné toutes les formules relatives à cette théorie nouvelle, qu'il a créée, M. Bonnet les applique à la recherche de certaines classes de surfaces parmi lesquelles sont les surfaces d'aire minima, et les surfaces à lignes de courbure planes déjà étudiées dans un autre mémoire.

La théorie des surfaces orthogonales, qui doit son origine aux beaux travaux de M. Dupin, a acquis, comme on sait, depuis les

belles recherches de M. Lamé, une importance réellement inattendue. Il était donc tout naturel de se demander sous quelles conditions de tels systèmes peuvent exister. M. Bouquet, dans une note élégante publiée dans le journal de M. Liouville, a le premier appelé l'attention sur cette question, en prouvant qu'un système de surfaces étant donné, il n'en existe pas en général deux autres qui puissent former avec lui un système triplement orthogonal, et son raisonnement simple et sans réplique consistait à citer des exemples. M. Serret a cherché la démonstration du même fait dans l'étude des conditions analytiques auxquelles satisfont les paramètres des trois surfaces qui composent tout système triplement orthogonal; l'analyse un peu sommaire de ce problème difficile conduit M. Serret à supposer que le nombre des systèmes, dont quelques-uns sont donnés par lui pour la première fois, pourrait bien être assez limité.

La question est importante, et, loin d'être épuisée, elle a occupé depuis MM. Bonnet, Darboux et Moutard, qui tous trois y ont consacré d'importants mémoires.

M. Bonnet, en traitant la question dans toute sa généralité, a obtenu des résultats qui, en la faisant entrer dans une voie nouvelle, lui font faire un pas fort important.

Décomposant le problème en deux, il cherche d'abord les directions des normales aux surfaces propres à faire partie d'un triple système orthogonal, et il obtient ainsi trois équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre, qui peuvent être remplacées par une équation unique du troisième ordre. Cette équation, quoique fort difficile sans doute à intégrer, doit paraître très-simple encore si l'on songe à l'extrême généralité et à la complication du problème.

M. Bonnet, dans son premier mémoire, se borne à considérer deux cas très-étendus encore, et montre que le problème, toujours fort difficile, se ramène dans ce cas à d'autres plus simples et d'un ordre moins élevé.

Digitized by Google

M. Darboux, en abordant la question par une tout autre voie, a trouvé des résultats moins généraux, il est vrai, mais plus précis et plus simples. En cherchant à étendre aux surfaces des résultats élégants obtenus par lui dans l'étude de certaines courbes, M. Darboux a été conduit à étudier les surfaces du quatrième degré qui ont pour lignes doubles le cercle imaginaire situé à l'infini. Ces surfaces font partie d'un système triplement orthogonal. Ce résultat fort élégant était obtenu en même temps par M. Moutard, qui le présentait à l'Académie des sciences le même jour que M. Darboux.

Dans sa thèse pour le doctorat, l'une des plus remarquables qui aient été présentées à la faculté des sciences de Paris, qui depuis vingt ans en a reçu pourtant de si distinguées, M. Darboux, continuant la même étude, déduit des équations de M. Lamé une nouvelle méthode de recherche de surfaces orthogonales qui paraît présenter des avantages propres dans l'étude de certains problèmes, et il en déduit les systèmes orthogonaux formés de surfaces à lignes de courbure planes.

La solution qui contient des fonctions arbitraires fournit le système orthogonal le plus général dont on ait encore obtenu l'équation sous forme finie.

M. Moutard, dont, à l'occasion de la théorie des fonctions elliptiques, nous avons cité déjà un excellent travail, s'est occupé aussi avec succès de la théorie des surfaces. La transformation si souvent employée sous le nom de *transformation par rayons vecteurs réciproques* le conduit à étudier une classe de surfaces qu'il nomme *anallagmatiques*, et dont la propriété singulière, découverte aussi par M. Darboux, est de former un système orthogonal *triple et un*, c'est-à-dire que les équations des trois systèmes de surfaces sont, comme celles du système triplement orthogonal des surfaces du second degré, des cas particuliers d'une même équation dans lesquels varie un seul paramètre.

D'autres recherches de M. Moutard sur les surfaces ne présentent

pas moins d'intérêt et témoignent de la même habileté. Citons deux notes présentées à la Société philomatique, dont l'une énonce deux propriétés nouvelles de la surface de Steiner, coupée par tous les plans tangents suivant deux coniques, et l'autre un théorème relatif aux surfaces du troisième ordre qui ont un contact du quatrième ordre.

Citons enfin un travail fort élégant relatif aux surfaces enveloppes, auquel l'habile et judicieux géomètre anglais, M. Salmon, a fait l'honneur bien mérité de le reproduire presque en entier dans son bel ouvrage sur la géométrie à trois dimensions.

M. Abel Transon, examinateur d'admission à l'École polytechnique, a étudié avec beaucoup de talent et de succès quelques points généraux de la théorie des courbes et des surfaces. Les géomètres, pour représenter l'affection d'une courbe en un point, font usage, depuis Leibnitz et Huyghens, du cercle qu'ils nomment *osculateur*. M. Transon, allant plus loin encore, cherche à représenter en chaque point l'écart plus ou moins grand de la forme circulaire, et il y parvient à l'aide d'un angle qu'il nomme *déviation*, et dont l'emploi équivaut à la considération du dernier élément de la courbe, lieu des milieux des cordes parallèles à la tangente. La *déviation* des sections normales d'une surface autour d'un point est soumise à des lois régulières, et M. Transon, trouve, par exemple, qu'elle est nulle pour une seule ou pour trois d'entre elles dont ce point est le sommet.

M. Transon est revenu plus récemment sur la théorie des surfaces, en la considérant sous un tout autre point de vue; il étudie les normales considérées comme un faisceau de droites remplissant l'espace et les propriétés caractéristiques qui les distinguent de tout autre faisceau, dont les lignes ne peuvent être coupées orthogonalement par aucune surface.

M. de la Gournerie, ingénieur distingué des ponts et chaussées, appelé à professer à l'École polytechnique la géométrie descriptive et la coupe des pierres, n'a pas voulu se borner à transmettre

aux générations nouvelles l'enseignement traditionnel qu'il avait reçu de ses maîtres. Ses études approfondies sur les diverses parties de son cours ont valu déjà à la science un excellent traité de perspective, plein d'élégance et d'originalité, et un livre fort complet et fort clair sur la géométrie descriptive. M. de la Gournerie, entré peut-être dans cette voie par dévouement à ses fonctions nouvelles, n'a pas tardé à s'y placer au rang des plus habiles. Plusieurs beaux mémoires de lui ont attiré l'attention de l'Académie des sciences et mérité les éloges de M. Chasles, qui vous en rendra compte dans son rapport sur les progrès de la géométrie. Je dois me borner à signaler ici un mémoire fort intéressant sur les questions relatives aux affinités d'ordre supérieur en un point d'une surface, qui déjà avaient été habilement traitées par M. Abel Transon.

La théorie des cartes géographiques se rattache intimement à la théorie générale des surfaces. Quoique la différence entre la terre et une sphère soit peu considérable, les géographes dans les cartes de grande précision doivent tenir compte de la variation du rayon, et les géomètres, toujours prêts à généraliser pour simplifier, ont dû se demander ce qu'il y aurait à faire pour représenter le mieux possible un globe de forme quelconque. Les noms les plus illustres figurent dans l'histoire de ce point de la science. Lagrange, Lambert et Gauss s'y sont successivement appliqués, et plusieurs très-bons mémoires sont venus depuis peu accroître cette importante théorie, dans laquelle MM. O. Bonnet, Tissot et Collignou se sont particulièrement distingués. M. Davezac, membre de l'Académie des inscriptions et belles lettres, a publié l'histoire complète des progrès de la théorie des cartes, et plus récemment M. Germain, dans un ouvrage très-savant et très-bien fait, en a minutieusement exposé tous les détails. La question toutefois n'est pas épuisée et ne saurait l'être. Le problème, en effet, est insoluble : une surface arrondie ne peut pas, quelque système qu'on adopte, être représentée exactement sur un plan. Il faut donc faire le

moins mal possible en s'imposant des conditions arbitraires qui peuvent varier à l'infini, et le choix à faire entre deux systèmes a quelque chose de vague et de conventionnel qui ne permet pas une solution définitive et acceptable dans tous les cas. Les travaux de MM. Tissot et Collignon sur cette question délicate y apportent pourtant beaucoup de netteté en la précisant autant qu'elle est susceptible de l'être.

L'étude générale des courbes à double courbure a donné lieu à des travaux de grand intérêt. Laissant de côté ceux qui se rattachent aux lignes algébriques, dont l'analyse trouvera sa place dans le résumé des travaux géométriques, je dois signaler quelques mémoires fort élégants, dont les résultats appartiennent par leur nature à l'analyse autant au moins qu'à la science de l'étendue.

Citons d'abord une note très-courte de M. Puiseux, intitulée, *Solution d'un problème de géométrie*, et dans laquelle, au sortir de l'École normale, l'habile auteur du beau mémoire sur les fonctions algébriques montrait déjà les qualités d'élégance et de précision qui distinguent tous ses travaux.

M. Serret, dont on retrouve le nom dans toutes les branches de la science, a composé plusieurs mémoires importants sur la théorie des courbes à double courbure. Il serait injuste d'oublier que quelques-uns des résultats qui y sont contenus avaient été donnés antérieurement sans que le savant auteur en eût connaissance. L'un d'eux, relatif aux courbes sphériques, appartient à M. O. Bonnet, et plusieurs formules remarquables qui permettent d'exprimer en fonctions des deux courbures d'une ligne les dérivées successives des coordonnées par rapport à l'arc, ne diffèrent pas de celles qu'avait données quelques années avant, dans une thèse présentée à la faculté des sciences de Toulouse, le savant et habile professeur de la faculté de Lyon, M. Frenet.

M. Bonnet, comme M. Frenet, a fait d'importantes recherches sur les courbes. Citons particulièrement dans l'abondance des résultats obtenus les évaluations élégantes de divers infiniment petits

d'ordre supérieur intimement liés aux affinités des lignes et utiles dans un grand nombre de démonstrations géométriques.

M. Molins, professeur à la faculté des sciences de Toulouse, s'est occupé aussi de la théorie générale des courbes à double courbure, et, dans deux mémoires fort intéressants publiés par le journal de M. Liouville, a obtenu d'élégants résultats relatifs aux développantes et aux courbes, dont la propriété plus générale est de couper sous un angle constant les tangentes à une courbe donnée.

M. Voizot, en étudiant la théorie générale des lignes de courbure, a rencontré des théorèmes remarquables par leur généralité et montré l'habileté dont il avait déjà fait preuve dans des recherches fort antérieures relatives à la théorie de l'élimination.

L'Académie des sciences de Paris, en proposant, pour sujet du prix de mathémathiques à décerner en 1860, une belle et difficile question relative à la théorie des surfaces, a dirigé sur ce sujet l'attention de plusieurs géomètres distingués, dont les mémoires ont mérité toute son approbation et ses plus vives félicitations.

La question proposée était : *l'étude des surfaces applicables sur une surface donnée.*

« Cinq mémoires, dit le rapporteur de l'Académie, ont été envoyés au concours ; deux d'entre eux ont été écartés après un premier examen. La question n'y est pas en effet complétement résolue, et les auteurs ne font aucune application des méthodes qu'ils proposent; leur travail est cependant digne d'intérêt sous plus d'un rapport. Les trois mémoires inscrits sous le numéro 1 (celui de M. Bour), sous le numéro 2 (celui de M. Codazzi), et le numéro 3 (celui de M. Bonnet), ont résolu la question principale, qui consistait à former les équations différentielles de toutes les surfaces applicables sur une surface donnée. Tous trois ont appliqué leurs formules aux cas qui se présentent le plus naturellement, et dont l'étude les a conduits à d'élégants théorèmes, dont les plus remarquables, qui sont aussi les plus simples, se trouvent obtenus dans les trois mémoires. Aucun des concurrents ne semble donc avoir,

pour cette partie du travail, de supériorité décidée sur les deux autres; tous trois ont fait preuve d'une grande habileté analytique et de connaissances très-profondes en géométrie.

« Mais le mémoire n° 1 (celui de M. Bour) contient en outre un chapitre très-remarquable, dont l'analogue ne se trouve pas dans les deux autres, et qui a décidé en sa faveur le choix unanime de la commission.

« L'auteur ne s'est en effet proposé rien moins que l'intégration complète des équations du problème dans le cas où la surface donnée est de révolution. Les méthodes ordinaires du calcul intégral ne semblant pas ici applicables; il a mis à profit une indication rapide, jetée comme en passant par Lagrange dans l'un de ses mémoires, et à l'application de laquelle l'illustre géomètre signalait lui-même de graves difficultés. Cette méthode consiste à former d'abord une solution complète de l'équation différentielle du second ordre, dans laquelle figurent cinq constantes arbitraires, et à en déduire les solutions générales par la variation de ces constantes. Les difficultés que Lagrange avait aperçues et signalées ont été très-habilement surmontées dans le mémoire n° 1. La commission espère que le savant auteur généralisera sa belle analyse et que le calcul intégral recevra par là un perfectionnement notable. Il sera juste de rapporter à Lagrange la gloire d'avoir ouvert cette voie nouvelle, mais le concours actuel occupera néanmoins une place importante dans l'histoire de son développement. »

Edmond Bour, en imprimant dans le Journal de l'École polytechnique le mémoire couronné par l'Académie, a malheureusement supprimé la dernière partie, dont la haute portée avait si vivement frappé la commission; désireux de l'étendre et de l'éclaircir, il voulait y consacrer un mémoire spécial et étendu. Sa mort prématurée laissera, comme celle de Galois, de profonds regrets aux géomètres, et ce précieux commentaire, que ses amis n'ont pas retrouvé dans ses papiers, est à jamais perdu pour la science.

Le travail de Bour sur la théorie des surfaces suffirait pour

assigner à son auteur un rang élevé parmi les géomètres du XIXe siècle. Un grand juge en pareille matière, M. Liouville, en disait un jour : « On pourrait le croire un beau mémoire de Lagrange. » Quoique bien jeune encore, celui qui méritait un tel éloge n'en était pas à ses débuts; avant comme après la publication de son mémoire sur les surfaces, il avait su montrer toute la profondeur et la pénétration de son esprit.

Entré à l'École polytechnique en 1851, il reçut en 1853 le titre d'élève ingénieur des mines; tout en poursuivant sérieusement ses études spéciales, il assistait avec grand intérêt aux leçons du Collége de France. Je l'ai compté pendant trois ans de suite au nombre de mes auditeurs les plus assidus, et mes leçons lui ont inspiré son premier mémoire. Qu'il me soit permis, dans ce tableau rapide où j'ai cru pouvoir absolument m'effacer, de rappeler ce souvenir auquel j'attache un grand prix.

« L'Académie nous a chargés, disait M. Liouville, de lui faire un rapport sur un mémoire de M. Edmond Bour, élève ingénieur des mines, concernant l'intégration des équations différentielles de la mécanique analytique. On sait qu'avec deux intégrales quelconques, A et B, de ces équations, Poisson a formé une combinaison (A, B) dont il a prouvé que la valeur est indépendante du temps, de sorte que, si la quantité (A, B) ne se réduit identiquement ni à zéro ni à une constante, on a, en l'égalant à une constante arbitraire, une intégrale des équations différentielles proposées. Le théorème de Poisson fournit donc, comme l'a observé Jacobi, une méthode d'intégration singulière, qui pourra quelquefois faire connaître toutes les intégrales au moyen de deux d'entre elles données d'abord. Mais il peut arriver qu'on ne trouve par là qu'un nombre très-limité d'intégrales distinctes; il se peut même qu'on n'en ajoute aucune aux deux (A, B) dont on part. Il en sera, par exemple, toujours ainsi quand l'une d'elles est celle des forces vives et que l'autre ne contient pas le temps, car alors on a identiquement $(A, B) = 0$. »

Digitized by Google

« Mais Jacobi nous avertit, et M. Bour prouve dans son mémoire que, dans le cas où la méthode d'intégration indiquée plus haut échoue, il y a souvent un autre parti à tirer des intégrales connues, pour achever ou du moins pour pousser plus loin l'intégration. Déjà l'un de nous l'avait montré dans le cours du Collége de France en 1853 et, dans une note présentée au Bureau des longitudes le 29 juin de la même année, mais pour le seul cas où l'on possède la moitié des intégrales. C'est en effet par des équations comme $(A, B) = 0$, que l'on exprime les conditions d'intégralité exigées par Poisson pour la détermination d'une fonction qui alors fournit les intégrales restantes. M. Bour pénètre plus profondément dans le cœur de la question, et il examine en général l'abaissement successif qui résulte de la connaissance de chaque intégrale nouvelle. Il nous serait difficile d'exposer en langage ordinaire les détails de son analyse. Contentons-nous de dire qu'il opère sur l'équation linéaire aux différences partielles du premier ordre que toute intégrale doit vérifier. C'est sur cette équation qu'il effectue un abaissement de deux unités dans le nombre des variables, à mesure qu'une nouvelle intégrale convenable lui est fournie.

« M. Bour montre de plus qu'un abaissement égal ou même supérieur peut quelquefois être obtenu au moyen d'intégrales qui semblaient d'abord étrangères à sa méthode.

« Les géomètres liront avec intérêt le mémoire de M. Edmond Bour. C'est dans les excellentes leçons de M. Bertrand sur la mécanique que M. Bour a surtout puisé l'idée première de son travail. L'élève s'est montré digne du maître. »

Les équations différentielles de la mécanique ont été depuis un quart de siècle l'objet de travaux importants et profonds, qui doivent être cités avec grand honneur dans l'histoire du calcul intégral. Lagrange, Poisson, Hamilton et Jacobi sont les grands noms qu'il faut placer en tête de ce beau chapitre de la science. Je n'ai pas à rappeler ici leurs travaux. Ils ont conduit à une théorie nou-

velle des équations différentielles partielles du premier ordre, qui comptera parmi les œuvres les plus considérables de l'illustre Jacobi, et que Bour, sur quelques indications fort incomplètes, a eu la force de reconstruire et de découvrir de nouveau en devançant la publication de l'œuvre posthume du grand géomètre.

A côté de ces travaux qui, suivant une expression de Jacobi, engrènent profondément dans les principes les plus généraux de la science, il est juste de signaler l'étude fort importante aussi de quelques points plus spéciaux qui, tout en accroissant la mécanique analytique, ont prouvé la pénétration et le savoir de leurs auteurs.

L'étude du mouvement d'un point attiré vers deux centres fixes a été le sujet de trois mémoires d'Euler, de deux mémoires de Lagrange, et d'une étude de Legendre. Jacobi l'a choisi comme exemple de l'application de son principe du dernier multiplicateur, et M. Liouville lui accorde une place importante dans ses élégants mémoires sur quelques cas particuliers dans lesquels le mouvement d'un point peut s'intégrer.

M. Serret, malgré tant de raisons pour croire la question épuisée, n'a pas craint de la prendre pour sujet de la thèse qui lui a valu le grade de docteur. Suivant les principes de M. Liouville, et prenant pour variables les coordonnées elliptiques déjà employées par Legendre, il obtient la solution la plus élégante et la plus simple qui ait été proposée jusqu'ici.

M. Desboves, s'inspirant également du mémoire de M. Liouville, a traité avec élégance le cas plus compliqué où l'un des centres est mobile, en montrant que les méthodes de Lagrange et d'Euler peuvent aussi s'appliquer à ce cas.

Edmond Bour, se rapprochant plus encore des questions de mécanique céleste, a abordé l'étude du problème des trois corps, en restant toutefois dans les conditions de généralité et de rigueur qui doivent faire placer son mémoire à côté de ceux que je viens de citer.

M. Rouché, dans une thèse fort remarquable, a étudié les inté-

grales communes à plusieurs problèmes de mécanique, et fait faire un pas important à cette question, que je crois avoir soulevée le premier, et dans la solution de laquelle j'avais laissé d'importantes lacunes.

M. Massieu, professeur de géologie à la faculté de Rennes, s'est exercé sur la même question, et avec un succès non moins grand.

La théorie du pendule sphérique, étudiée après Huyghens par Lagrange et par Legendre, a été l'objet de plusieurs recherches intéressantes.

M. Puiseux, dans une note élégante, où l'on retrouve la perfection caractéristique de tous ses travaux, a corrigé une erreur de Lagrange, en prouvant que les axes de l'ellipse mobile parcourue à chaque oscillation se déplacent toujours dans le sens même de la rotation.

M. Tissot, dans une excellente thèse présentée à la faculté des sciences de Paris, a introduit dans la solution connue les fonctions périodiques considérées pour la première fois par Jacobi, et mis par là en évidence, plus nettement qu'on ne l'avait fait avant lui, les circonstances principales et la périodicité du mouvement.

M. Bravais, enfin, à l'occasion de la belle expérience de M. Foucaut, a repris toute la théorie, en ayant égard au mouvement de rotation de la terre, et proposé un moyen ingénieux, quoique difficile peut-être à réaliser, de confirmer, par l'étude du nombre des oscillations, la conclusion si clairement déduite dans le cas du mouvement plan de la variation de leur azimut.

Tels sont, Monsieur le Ministre, les traits principaux, bien rapidement esquissés des progrès apportés dans ces derniers temps aux plus grandes théories relatives à l'analyse, auxquelles j'ai dû borner ce rapport. La géométrie pure, la mécanique appliquée, la mécanique céleste et la physique mathématique n'y occupent aucune place; d'autres auront l'honneur de vous signaler leurs progrès. Je n'ai pas cependant terminé ma tâche, et bien des noms justement estimés par les géomètres sont restés en dehors du cadre que je me suis tracé. Leurs recherches, pour ne pas se rencontrer aux

abords des grandes voies actuellement suivies par les plus habiles, ne méritent pour cela ni moins d'attention ni moins d'intérêt.

MM. Prouhet et Gerono dirigent avec beaucoup de zèle et de conscience un journal utile aux jeunes candidats à nos écoles, dans lequel les théories les plus élevées sont de temps à autre savamment et judicieusement abordées.

MM. Terquem et Gerono, en créant ce recueil pour les aspirants à l'École polytechnique et à la section des sciences de l'École normale, se proposaient de développer quelques points difficiles du cours de mathématiques spéciales, d'en simplifier l'exposition et de propager les nouvelles méthodes tout en répandant d'utiles notions d'histoire scientifique et de bibliographie. M. Terquem apportait dans cette entreprise, avec une immense érudition, la connaissance approfondie des langues anciennes et modernes; son collaborateur, M. Gerono, était depuis longtemps connu comme un des plus excellents maîtres de l'enseignement libre. Depuis vingt-cinq ans les Nouvelles Annales n'ont pas cessé d'être un centre de communications actives entre tous ceux qui, en France ou à l'étranger, soit par goût, soit par profession, s'intéressent aux mathématiques, et de nombreuses questions proposées aux lecteurs ont souvent excité les élèves et développé peut-être chez plus d'un savant aujourd'hui célèbre le goût des recherches personnelles et l'habitude de la difficulté vaincue.

Les Nouvelles Annales ne font pas double emploi avec l'excellent recueil dirigé par M. Liouville, et, quoique bien des lecteurs trouvent plaisir et profit à les consulter tous les deux, leurs buts sont entièrement différents.

M. Prouhet, qui se montre le digne successeur du vénérable M. Terquem, excelle comme lui à analyser les ouvrages nouveaux en les comparant avec une bienveillance non moins grande et non moins éclairée aux travaux analogues antérieurement connus. Ses recherches personnelles ont plus d'une fois, d'ailleurs, attiré l'attention. Permettez-moi de citer seulement une note très-intéressante

Digitized by Google

sur les arcs dont la tangente est rationnelle, publiée par lui dans le journal de M. Liouville, et qui, sans avoir de grandes conséquences, causera certainement aux géomètres qui le liront quelques instants de véritable plaisir. Aucun géomètre, si éminent qu'il soit ou ait été, je ne crains d'être démenti par personne, n'aurait déparé son œuvre en y insérant cet excellent travail.

M. Catalan a brillamment débuté, en 1839, par deux mémoires de calcul intégral, l'un sur les intégrales multiples, dans lequel il déduit d'une méthode élégante d'importantes formules de réduction; l'autre, couronné par l'Académie des sciences de Bruxelles, qui avait laissé la question au choix des concurrents, est relatif aussi à la théorie des intégrales multiples et à l'étude des changements de variables dans leur expression.

M. Catalan a publié depuis de nombreux travaux sur divers problèmes de calcul intégral, sur l'étude de divers points d'analyse et sur plusieurs questions de géométrie. Ses mémoires et ses notes, accueillis avec empressement dans les divers recueils consacrés aux mathématiques, l'ont fait connaître et estimer par les géomètres de tous les pays.

Contentons-nous, dans l'impossibilité où nous sommes, de les analyser ici, de citer un théorème élégant et plusieurs fois étudié depuis sur la surface gauche d'aire minima qui ne peut, d'après sa démonstration, être qu'une hélicoïde à plan directeur.

M. Haton de la Goupillère a, comme M. Catalan, résolu un grand nombre de problèmes intéressants qui, en prouvant son habileté et son goût pour la science, pourront servir d'utiles exercices à ceux qui cherchent en l'étudiant l'occasion d'en approfondir les méthodes les plus délicates et les plus élevées.

M. Rouché, dont nous avons cité déjà l'excellente thèse de mécanique, a montré depuis, à plusieurs reprises, autant d'habileté que de goût pour la science. Un très-bon mémoire de lui sur la série de Lagrange a été approuvé et loué par l'Académie des sciences, et dans ses études sur certains développements de fonctions

en séries ordonnées suivant les dénominateurs des réduites d'une fraction continue, il a su, sur un terrain parcouru déjà par Gauss et par M. Tchebitchev, montrer avec l'intelligence complète des œuvres de ses illustres et profonds devanciers, l'esprit d'invention qui lui donne le droit de suivre leurs traces.

M. Combescure, en étudiant plusieurs questions difficiles, a fait preuve à la fois de science et d'invention. Dans un mémoire sur la théorie des invariants, il reprend et analyse, en les simplifiant, les beaux travaux, encore peu connus en France, de deux illustres géomètres anglais, MM. Sylvester et Cayley, et de l'un des plus habiles géomètres italiens, M. Brioschi.

Les premiers travaux de M. Combescure ont été publiés aux États-Unis où il a, pendant plusieurs années, rempli les fonctions de professeur. L'un d'entre eux contient une extension élégante des formules relatives au mouvement d'un point sur un plan, dans le cas où le point est situé sur une sphère et sollicité par une force tangente au grand cercle qui le réunit à un point fixe.

D'autres travaux d'analyse pure et de géométrie, parmi lesquels je citerai un travail sur la théorie des coordonnées curvilignes obliques communiqué à l'Académie des sciences et destiné aux Annales de l'École normale supérieure, montrent, chez M. Combescure, un géomètre instruit et ingénieux à la fois, que l'on doit compter parmi ceux dont la science peut attendre de sérieux progrès.

M. Caqué a publié, en 1840, dans le journal de M. Liouville, une démonstration, ingénieuse du reste, de la série de Taylor, qui lui a valu l'estime et l'attention particulière de M. Sturm. Absorbé depuis cette époque par les exigences d'un laborieux enseignement, il est resté bien des années sans se rappeler au souvenir des géomètres, mais son premier travail était resté dans leur mémoire, et d'excellentes thèses pour le doctorat, présentées par lui à la faculté des sciences, en 1862, n'ont aucunement surpris les juges compétents, qui, depuis longtemps, n'ignoraient pas combien la modestie de M. Caqué cache de pénétration et de véritable savoir.

Digitized by Google

M. E. Barbier, à qui ses maîtres, il y a peu d'années, avaient dès son passage à l'École normale supérieure présagé les plus grands succès, a débuté par une note très-élégante sur un problème de calcul des probabilités dans laquelle, à l'occasion d'une question de mince importance, il sait donner la marque d'un esprit réellement distingué. M. Barbier, plus enclin à la géométrie qu'à l'analyse, a donné aux Nouvelles Annales de mathématiques plusieurs articles intéressants, dont il vous sera rendu compte ailleurs. Voué pendant quelque temps aux études d'astronomie pratique, il y a porté toute l'ardeur et toute la curiosité de son esprit jusqu'au jour où, comme le père Joubert, il est entré dans la société de Jésus, qui, je l'espère bien, ne l'enlèvera pas plus que lui aux sciences pour lesquelles il s'est montré si heureusement doué.

M. Dormoy, ingénieur distingué du corps des mines a, comme ses savants camarades, M. Jordan et M. Mathieu, fait voir, par d'ingénieuses recherches, que les études mathématiques de l'École polytechnique ont laissé dans son esprit de solides et fécondes empreintes. Un élégant mémoire de lui sur les nombres premiers mérite une mention particulière.

Bien loin d'avoir cité tous les travaux accomplis, je n'ai pas même rencontré dans ce court résumé les noms de tous les géomètres qui, depuis vingt ans, ont fait honneur parmi nous aux études mathématiques. Le regrettable Sarrus, doyen de la faculté de Strasbourg, MM. Bourget, Houel, Brassine, Amiot, Roche, l'abbé Aoust, Lespiault, le père Chartier, Borguet, Painvin, Paul Serret, Plarr, Valson, Saint-Germain, Meray, Stéphann, Hermann Laurent, les uns depuis longtemps connus par de solides recherches et par un enseignement excellent, d'autres jeunes encore et dont les débuts promettent une brillante carrière, auraient droit chacun, si le cadre de ce rapport le comportait, à une notice spéciale, où j'aurais à signaler plus d'une preuve d'habileté et de savoir. D'autres rapports relatifs à la physique mathématique, à la mécanique céleste, à la géométrie, donneront d'ailleurs à quelques-uns d'entre eux la place

importante que l'opinion, depuis longtemps, leur assigne. Les autres, dont le temps, je n'en doute pas, grandira encore la réputation, peuvent devenir les dignes successeurs des représentants et des chefs actuels de nos travaux mathématiques.

BIBLIOTECA NAZIONALE R. E. III - ROMA

FIN.

VA.1 1527988

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

BIBLIOTECA
NA
B.
C